

# 2

## Πίνακες & διανύσματα

### Διδακτικοί στόχοι του κεφαλαίου

**Στόχοι:** Ο αναγνώστης μελετώντας το κεφαλαίο θα είναι ικανός:

- να κατανοεί την έννοια του πίνακα, της ορίζουσας, του βαθμού πίνακα και του διανύσματος,
- να κατανοεί το χειρισμό του γινομένου πινάκων και την εύρεση του αντίστροφου πίνακα,
- να κατανοεί τις λειτουργίες διαχείρισης δεδομένων σε πίνακα,
- να κατανοεί τις λειτουργίες της συνένωσης και διαχωρισμού πινάκων.

**Δεξιότητες:** Ο αναγνώστης μετά το πέρας του κεφαλαίου θα είναι ικανός:

- να χειρίζεται πίνακες και διανύσματα,
- να κάνει χρήση οριζουσών,
- να πραγματοποιεί λειτουργίες σε έναν πίνακα, όπως εύρεση μεγίστου και ελαχίστου των στοιχείων ενός πίνακα, του αθροίσματος των στοιχείων καθώς και του αθροίσματος των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης του,
- να βρίσκει το γινόμενο πινάκων και το αντίστροφο τετραγωνικού πίνακα,
- να πραγματοποιεί την εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων τετραγωνικού πίνακα.

**Λέξεις κλειδιά:** διάνυσμα, πίνακας, ορίζουσα, γινόμενο πινάκων, αντίστροφος πίνακας, βαθμός πίνακα, εύρεση μεγίστου ή ελαχίστου πίνακα, εσωτερικό/εξωτερικό γινόμενο.

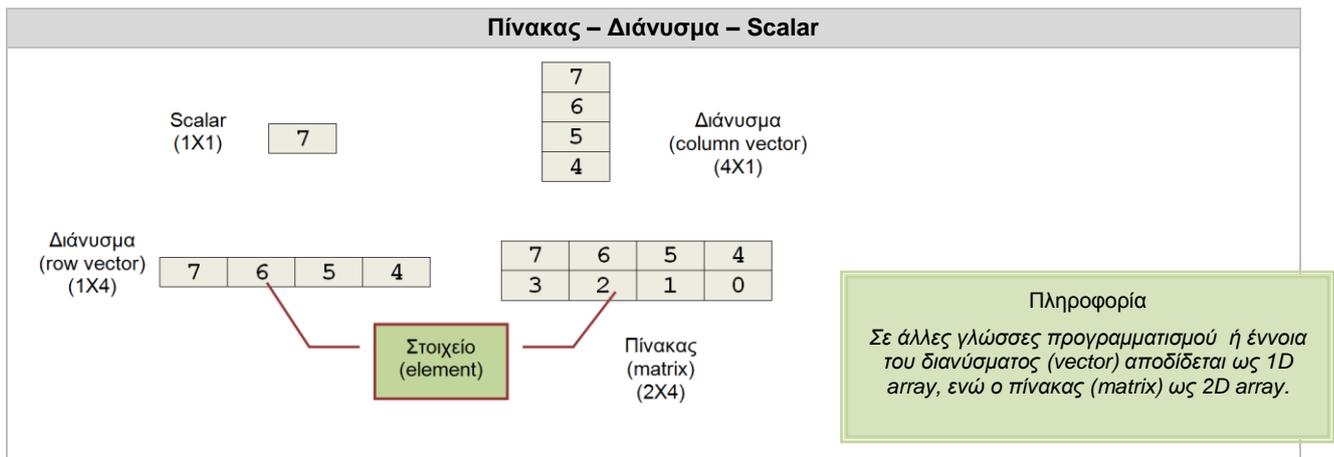
### Πρακτικός οδηγός εντολών του κεφαλαίου



Εντολές			
Ενέργεια	Σύνταξη	(σελ.)	
Δημιουργία πίνακα A, n ισαπεχόντων τιμών του [a,b]	$A = \text{linspace}(a, b, n)$ ή $A = a : \text{vh}ma : b$	28	
Πίνακας A n x m τυχαίων αριθμών στο (0,1)	$A = \text{rand}(n, m)$	28	
Συζυγής ανάστροφος του A	$A'$	34	

Εντολές		
Ενέργεια	Σύνταξη	(σελ.)
Ορίζουσα του A	<code>det (A)</code>	38
Αντίστροφος του A	<code>inv (A)</code>	39
Βαθμός του A	<code>rank (A)</code>	40
Διαστάσεις του A	<code>size (A)</code>	41
Μεγαλύτερη διάσταση του A	<code>length (A)</code>	41
Πλήθος στοιχείων του A	<code>numel (A)</code>	42
Μέγιστο μονοδιάστατου του πίνακα A	<code>max (A)</code>	42
Ελάχιστο μονοδιάστατου του πίνακα A	<code>min (A)</code>	42
Άθροισμα στοιχείων πίνακα A	<code>sum (A)</code>	43
Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	<code>dot (u, v)</code>	44
Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	<code>cross (u, v)</code>	45
Ιδιοτιμές πίνακα	<code>d=eig (A)</code>	47
Ιδιοτιμές και μοναδιαία (μέτρου μονάδας) ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα	<code>[V, D]=eig (a)</code>	48

Πρόσθετες εντολές σε πίνακες	
Ενέργεια	Σύνταξη
Μέγιστο μονοδιάστατου του πίνακα A και θέση αυτού $k$	<code>[megisto k]=max (A)</code>
Ελάχιστο μονοδιάστατου του πίνακα A και θέση αυτού $k$	<code>[elaxisto k]=min (A)</code>
Μέγιστο κάθε γραμμής του πίνακα A	<code>max (A, [], 2)</code>
Μέγιστο κάθε στήλης του πίνακα A	<code>max (A)</code>
Μέγιστο πίνακα A	<code>max (max (A) )</code>
Ελάχιστο κάθε γραμμής του πίνακα A	<code>min (A, [], 2)</code>
Ελάχιστο κάθε στήλης του πίνακα A	<code>min (A)</code>
Ελάχιστο πίνακα A	<code>min (min (A) )</code>
Άθροισμα στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα A	<code>sum (A, 2)</code>
Άθροισμα στοιχείων κάθε στήλης του πίνακα A	<code>sum (A)</code>
Άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα A	<code>sum (sum (A) )</code>
Μέση τιμή κάθε στήλης του πίνακα A	<code>mean (A)</code>
Μέση τιμή όλων των στοιχείων του πίνακα A	<code>mean (mean (A))</code>
Πίνακας A $n \times m$ τυχαίων ακεραίων στο [a,b]	<code>A=randi ([a, b], n, m)</code>
Μηδενικός πίνακας $n \times m$	<code>zeros (n, m)</code>
Μηδενικός τετραγωνικός πίνακας $n \times n$	<code>zeros (n)</code>
Τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με όλα τα στοιχεία 1	<code>ones (n)</code>
Πίνακας $n \times m$ με όλα τα στοιχεία 1	<code>ones (n, m)</code>
Μοναδιαίος πίνακας $n \times n$	<code>eye (n)</code>



## 2.1 Πίνακες στο MATLAB

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τώρα πολύ συνοπτικά την έννοια και χρησιμότητα των πινάκων. Όπως όλες οι γλώσσες προγραμματισμού, ομοίως και το MATLAB επιτρέπει την αποθήκευση ομοίου τύπου τιμών σε μεγάλες οργανωμένες δομές που ονομάζονται πίνακες.

Οι πίνακες χρησιμοποιούνται όταν θέλουμε να αποθηκεύσουμε μεγάλο όγκο δεδομένων, όπως αριθμούς, χαρακτήρες, συμβολοσειρές, ή άλλους πίνακες. Η αποθήκευση δεδομένων σε πίνακες επιτρέπει την εύκολη προσπέλαση των αποθηκευμένων δεδομένων, χωρίς τη χρήση ισάριθμων μεταβλητών. Για παράδειγμα, σε μια εφαρμογή στην οποία απαιτείται η αποθήκευση βαθμολογιών χιλίων σπουδαστών για ένα μάθημα, είναι πολύ πιο εύκολο και λειτουργικό να αποθηκεύσουμε τις χίλιες βαθμολογίες σε ένα πίνακα βαθμολογιών χιλίων θέσεων, παρά να ορίσουμε χίλιες διαφορετικές μεταβλητές, μία για κάθε βαθμολογία κάθε σπουδαστή.

Επίσης, ταυτόχρονα, είναι απαραίτητο να αποθηκεύσουμε τα στοιχεία του κάθε φοιτητή με την ίδια σειρά σε μια ανάλογη δομή, ώστε να γνωρίζουμε ποιο βαθμό έλαβε ο κάθε φοιτητής.

Στη συνέχεια, στο διπλανό πλαίσιο παρουσιάζεται ένας από τους τρόπους που, στο MATLAB, έχει στη διάθεσή του ο χρήστης για να δημιουργεί πίνακες. Άλλοι τέτοιοι τρόποι θα παρουσιαστούν στις επόμενες ενότητες με χρήση επαναληπτικών βρόχων. Πράγματι, ο πρώτος τρόπος ορισμού και αρχικοποίησης πινάκων στο MATLAB είναι ο εξής: Πιο αναλυτικά, για να αποδώσουμε τιμές σε έναν πίνακα A στο Command Window, δεξιά του συμβόλου A θέτουμε το σύμβολο απόδοσης «=» και οριοθετούμε τα στοιχεία του πίνακα από τις αγκύλες που ανοίγουν και κλείνουν, ενώ ταυτόχρονα διαχωρίζουμε αυτά τα στοιχεία μεταξύ τους αυστηρά είτε με κόμματα είτε με κενό. Ως αποτέλεσμα της συγκεκριμένης εντολής, αφού πατήσουμε enter, λαμβάνουμε έναν πίνακα μίας γραμμής και τεσσάρων στηλών με ακέραιες τιμές. Ο πίνακας αυτός λέγεται και πίνακας διαστάσεων 1 επί 4, διότι έχει 1 γραμμή και 4 στήλες.

```
Command Window
>> A=[1 -2 3 5]

A =

1    -2     3     5
```



```
Command Window
>> A=[5 -1 2 -6 8]

A =

5    -1     2    -6     8
```

Σημειώνουμε ότι έγκυρα ονόματα πινάκων είναι όλα τα ονόματα τα οποία ακολουθούν τους κανόνες ονοματολογίας μεταβλητών που προαναφέρθηκαν. Συνιστάται η χρήση κεφαλαίων χαρακτήρων στα ονόματα πινάκων, τουλάχιστον για όποιον μαθαίνει προγραμματισμό σε MATLAB, ώστε να μπορεί να

αντιδιαστέλλει αμέσως τους πίνακες και τις απλές (βαθμωτές) μεταβλητές. Όμως, αυτός δεν είναι κανόνας της γλώσσας MATLAB, είναι υπόδειξη προγραμματιστικής τεχνικής, που μπορεί να αποβεί πολύ χρήσιμη ιδιαίτερα σε μεγάλα προγράμματα.

Ορισμένα παραδείγματα αποδεκτών ονομάτων:

```
A, AB, Matrix, PINAX, CubE
```

Ορισμένα παραδείγματα αποδεκτών, αλλά μη συνιστώμενων ονομάτων:

```
a, bB, mATRIX, pina, CubE
```

Ορισμένα παραδείγματα μη αποδεκτών ονομάτων:

```
%a, [mATRIX, ] pina, !CubE
```

Στις περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού, όπως στη πολύ διαδεδομένη γλώσσα C, επιτρέπεται να αποθηκεύει κανείς σε έναν πίνακα μόνο στοιχεία ίδιου τύπου, όπως παραδείγματος χάρη μόνο ακέραιους αριθμούς, μόνον πραγματικούς σε δεκαδική μορφή με υποδιαστολή ή μόνο χαρακτήρες. Στο MATLAB κατ' εξαίρεση, επιτρέπεται η ταυτόχρονη αποθήκευση ακέραιων και πραγματικών δεκαδικών αριθμών σε πίνακες. Για παράδειγμα, γράφοντας στο Command Window την εντολή που φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα και πατώντας enter, προκύπτει ο πίνακας B που είναι πίνακας πραγματικών αριθμών. Δηλαδή το MATLAB μετατρέπει αυτόματα σε πραγματικούς δεκαδικούς αριθμούς τις τιμές ενός πίνακα στις οποίες έχουμε αποδώσει ανάμεικτα ακέραιες και πραγματικές τιμές. Ειδικότερα, στις ακέραιες τιμές, το MATLAB προσθέτει αυτόματα τελεία «.» που υπέχει τον ρόλο υποδιαστολής και ταυτόχρονα συμπληρώνει αυτόματα τα δεκαδικά ψηφία με μηδέν.

Command Window					
>>	B=[5	-1	2.3	6	8.5]
B =					
5.0000	-1.0000	2.3000	6.0000	8.5000	

Επιπλέον, στην παρακάτω εικόνα, μπορούμε να δούμε μια περίπτωση όπου χρησιμοποιούνται σαν στοιχεία του ίδιου πίνακα, τόσο ακέραιοι, όσο και ρητοί και πραγματικοί αριθμοί. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το pi είναι το γνωστό ελληνικό π, ενώ τονίζουμε ότι το σύμβολο pi είναι δεσμευμένο από τον διεργηγέα MATLAB.

Command Window					
>>	X=[sqrt(5)	-1	pi/2	-6/5	8.92]
X =					
2.2361	-1.0000	1.5708	-1.2000	8.9200	

Το MATLAB δέχεται και διαχειρίζεται επίσης και πίνακες που έχουν περισσότερες από μια γραμμές ή/και στήλες. Παραδείγματος χάρη, γράφοντας στο Command Window την εντολή που φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα και πατώντας enter, λαμβάνουμε τον πίνακα A2 που είναι ένας πίνακας δύο διαστάσεων με 2 γραμμές και 5 στήλες ή πιο απλά, ένας πίνακας διαστάσεων 2 επί 5.

Command Window									
>>	mat=[4.3	pi	2	4	-1;5	-1	2.3	6	8.5]
mat =									
4.3000	3.1416	2.0000	4.0000	-1.0000					
5.0000	-1.0000	2.3000	6.0000	8.5000					

Τονίζεται επίσης ότι τα στοιχεία οποιουδήποτε πολυδιάστατου πίνακα οριοθετούνται πάλι από αγκύλες. Τα στοιχεία της ίδιας γραμμής, όπως προαναφέρθηκε, διαχωρίζονται μεταξύ τους αυστηρά είτε με κόμματα είτε με κενό, ενώ οι γραμμές διαχωρίζονται μεταξύ τους είτε με ελληνικό ερωτηματικό είτε με enter. Στο επόμενο παράδειγμα δίνουμε ένα διδιάστατο πίνακα, του  $m$ , ο οποίος είναι διαστάσεων 6 επί 2.



```
Command Window
>> m=[4.3 pi; 2 4; -1 0; -1 2.3; 6 8.5;sqrt(3)/2 -1]

m =
    4.3000    3.1416
    2.0000    4.0000
   -1.0000     0
   -1.0000    2.3000
    6.0000    8.5000
    0.8660   -1.0000
```

Στο επόμενο παράδειγμα ο πίνακας  $m$  είναι διαστάσεων 5 επί 1.

```
Command Window
>> m=[4.3 ; 4; 0; 2.3; 8.5 ]

m =
    4.3000
    4.0000
     0
    2.3000
    8.5000
```

```
Command Window
>> ch=['καλη' 'μέρα']
ch =
καλημέρα
>> ch2=['γειά ' σου']
ch2 =
γειά σου
```

Οι πίνακες οι οποίοι έχουν μόνο μία στήλη, λέγονται **πίνακες-στήλη** και είναι διαστάσεων  $n$  επί 1, όπου  $n$  ο αριθμός των γραμμών τους.

Αντίστοιχα, οι πίνακες μίας γραμμής ονομάζονται **πίνακες-γραμμή** ή **πίνακες-γραμμής** και είναι διαστάσεων 1 επί  $m$ , όπου  $m$  ο αριθμός των στηλών τους.

Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι το MATLAB ενώνει αυτόματα τα επιμέρους στοιχεία του πίνακα χαρακτήρων σε μια ενιαία συμβολοσειρά. Για να γίνουν πιο κατανοητοί οι πίνακες χαρακτήρων, παρουσιάζονται άλλα δύο παραδείγματα. Τονίζεται ότι ο πίνακας  $ch$  είναι διαστάσεων 1 επί 8, όπου το στοιχείο της πρώτης στήλης είναι το 'κ', της δεύτερης είναι το 'α' και ούτω καθεξής. Κατ' αναλογία ο πίνακας  $ch2$  έχει διαστάσεις 1 επί 8, διότι το κενό προσμετράται σαν χαρακτήρας. Σημειώνουμε ότι ένας τρόπος να παράξουμε τον χαρακτήρα κενό << >> είναι να πατήσουμε space bar ανάμεσα σε 2 μονά εισαγωγικά. Στη γενική περίπτωση, οι διδιάστατοι πίνακες είναι διαστάσεων  $n$  επί  $m$ , όπου  $n$  ο αριθμός των γραμμών και  $m$  ο αριθμός των στηλών τους.

Στο MATLAB ορίζονται επίσης **πίνακες χαρακτήρων**, με ανάλογο τρόπο. Οι πίνακες χαρακτήρων ονομάζονται και **αλυσίδες ή ακολουθίες χαρακτήρων (strings) ή συμβολοσειρές**.

Συγκεκριμένα:

- Τα στοιχεία ενός πίνακα χαρακτήρων οριοθετούνται πάλι με αγκύλες.
- Το κάθε στοιχείο του πίνακα οριοθετείται με μονά εισαγωγικά ενώ, διαχωρίζεται από τα υπόλοιπα είτε με κόμματα είτε με κενά.

Για παράδειγμα, αν γράψουμε στο Command Window την παρακάτω εντολή, θα λάβουμε →

```
Command Window
>> Characters1=['wq' 'q2' 'a5-b^2']
Characters1=
      wq2a5-b^2
```

Εφιστούμε την προσοχή στο διπλανό παράδειγμα. Ο πίνακας pin αριθμητικών χαρακτήρων δίνει την ακολουθία χαρακτήρων 1,2,3 και όχι τον πίνακα με στοιχεία τους αριθμούς 1,2,3, ούτε τον αριθμό εκατόν είκοσι τρία.

```
Command Window
>> pin=['1' '2' '3']
pin =
123
```

### Άξιο αναφοράς αποτελεί το σχόλιο της παρακάτω πρότασης

Αν ξεφύγουμε από τους κανόνες, το MATLAB θα εμφανίσει μήνυμα σφάλματος στο Command Window και δεν θα παράξει το αποτέλεσμα που επιθυμεί ο προγραμματιστής.

```
Command Window
>> A==" '1' '2' '3'"
A==" '1' '2' '3'"
Error: Unexpected MATLAB expression.
```

**Παράδειγμα:** Αν αντί για μονά εισαγωγικά χρησιμοποιήσαμε διπλά εισαγωγικά, θα λάβουμε ένα αντίστοιχο μήνυμα σφάλματος.

## 2.2 Ανάκληση στοιχείου από πίνακα

Εντολή  
MATLAB

$A(i, j)$

Δίνει το στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στη γραμμή i και στη στήλη j.

Το στοιχείο της γραμμής i και στήλης j του πίνακα A συμβολίζεται ως  $A(i,j)$ .

Για παράδειγμα, για εμφανιστεί στην οθόνη το στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στην τρίτη γραμμή και στη δεύτερη στήλη, γράφουμε στο command window την εντολή

$A(3,2)$

και πατάμε enter.

**Παράδειγμα:** Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 12345 \\ 23456 \\ 34560 \\ 45608 \end{bmatrix}$$

εισάγεται ως:

```
Command Window
>> A = [1 2 3 4 5; 2 3 4 5 6; 3 4 5 6 0; 4 5 6 0 8]
```

### Παράδειγμα 2.1

Για τον παραπάνω πίνακα A να εμφανιστεί:

α) το στοιχείο της δεύτερης γραμμής και τρίτης στήλης, β) η τρίτη γραμμή, γ) η πέμπτη στήλη.

**Προγραμματισμός MATLAB**

Command Window
>>A = [1 2 3 4 5; 2 3 4 5 6; 3 4 5 6 0; 4 5 6 0 8]
>>sprintf('A(2, 3)=%d', A(2, 3))
>>τρίτη γραμμή = A(3,:)
>>πέμπτη στήλη = A(:,5)

**Αποτέλεσμα MATLAB**

Command Window
ans =
A(2, 3)=4
τρίτη γραμμή=[3 4 5 6 0]
πέμπτη στήλη=
5
6
0
8

Κατά αντιστοιχία, οι κανόνες προσπέλασης στοιχείων ενός πίνακα ισχύουν και για πίνακες χαρακτήρων και συμβολοσειρών. Θεωρώντας τον προηγούμενο πίνακα CHARACTERS1, μπορούμε να εμφανίσουμε το δεύτερο στοιχείο του δίνοντας την εντολή

CHARACTERS1(1, 2)

Στην οθόνη θα λάβουμε το χαρακτήρα που βρίσκεται στην πρώτη γραμμή και δεύτερη στήλη του πίνακα. Το τελευταίο παράδειγμα παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

Command Window
>> CHARACTERS1=['Mat' 'lab'];
>> CHARACTERS1(1,2)
a
>> CHARACTERS1(1,4)
l
>> CHARACTERS1(1,6)
b

Εφιστούμε την προσοχή στο ότι, όπως είχε σημειωθεί στο αντίστοιχο παράδειγμα, το MATLAB αυτόματα συνενώνει τις επιμέρους συμβολοσειρές σε μία. Επομένως, ο πίνακας CHARACTERS1 έχει συνολικά μια γραμμή και έξι στήλες και όχι μία γραμμή και φαινομενικά δύο στήλες, όπως τον είχαμε αρχικά ορίσει! Αν θέλουμε, επομένως, να πάρουμε το τέταρτο στοιχείο του πίνακα, αρκεί να γράψουμε την εντολή

CHARACTERS1(1, 4)

και να πατήσουμε enter, οπότε θα πάρουμε σαν αποτέλεσμα τον τέταρτο κατά σειρά χαρακτήρα του string MATLAB, ενώ, αν θέλουμε να πάρουμε το έκτο στοιχείο της συμβολοσειράς, αρκεί να δώσουμε την εντολή

CHARACTERS1(1, 6)

Επιπροσθέτως αξίζει να σημειωθεί ότι για πίνακες οι οποίοι έχουν μια γραμμή ή μία στήλη, που θυμίζουμε ότι λέγονται πίνακες γραμμή ή πίνακες στήλη αντίστοιχα, για να προσπελάσουμε ένα στοιχείο τους δεν χρειάζεται να δώσουμε τον αριθμό της γραμμής ή της στήλης αντίστοιχα, διότι αυτός είναι ένα και μπορεί να παραλειφθεί. Δηλαδή, στο προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι απεικονίζεται στο διπλανό πλαίσιο. Αντίστοιχα και για τον πίνακα-στήλη B, αν γράψουμε στο Command Window την εντολή

B(4)

και πατήσουμε enter θα λάβουμε σαν αποτέλεσμα το στοιχείο που βρίσκεται στη δεύτερη θέση αυτού. Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα λάβουμε αν δώσουμε την εντολή `B(4,1)` και πατήσουμε enter.

```
Command Window
>> CHARACTERS1(2)

ans =
a

>> CHARACTERS1(4)

ans =
l

>> CHARACTERS1(6)

ans =
b
```

```
Command Window
>> B=[4.3 ; 4; 0; 2.3; 8.5 ]
B =
4.3000
4.0000
0
2.3000
8.5000

>> B(4)
ans =
2.3000

>> B(4,1)
ans =
2.3000
```

Εφιστούμε πάλι την προσοχή στο ότι σε περίπτωση που ξεφύγουμε από τα όρια του πίνακα κατά την προσπάθεια προσπέλασης κάποιου στοιχείου του που δεν υπάρχει, θα λάβουμε κατάλληλο μήνυμα λάθους στο command window. Όπως αν στον πίνακα B, ο οποίος ορίστηκε προηγουμένως, προσπαθήσουμε να προσπελάσουμε το όγδοο στοιχείο δίνοντας την εντολή `B(8)` και πατώντας enter θα εμφανιστεί το παρακάτω μήνυμα. Αυτό συμβαίνει διότι ο πίνακας C έχει επτά στοιχεία, επομένως, όταν ζητάμε από το MATLAB να μας δώσει το όγδοο στοιχείο του, προφανώς, δεν μπορεί να το κάνει.

```
Command Window
B(8)
Index exceeds matrix dimensions.
```

Στο σημείο αυτό να τονίσουμε μία σημαντική γενική παρατήρηση. Ο διερμηνέας MATLAB, όπως και τα περισσότερα ανάλογα περιβάλλοντα προγραμματισμού, δέχεται πίνακες όπου όλες οι γραμμές τους έχουν το ίδιο πλήθος στηλών ή ισοδυνάμως, όλες οι στήλες τους έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ανεξαρτήτως του αν ο αριθμός των στηλών είναι διαφορετικός από τον αριθμό των γραμμών τους. Σε αντίθετη περίπτωση, όπως φαίνεται και στο παραπάνω παράδειγμα, το MATLAB εμφανίζει αντίστοιχο μήνυμα σφάλματος. Τα στοιχεία του εισάγονται κατά γραμμή με κενά ανάμεσά τους. Στο τέλος κάθε γραμμής υπάρχει ";".

```
Command Window
>> M1=[4 5;2 3 1]

Error using vertcat
Dimensions of matrices being concatenated are not consistent.
```

### 2.3 Ανάκληση μίας γραμμής ή μίας στήλης πίνακα

Η ανάκληση όλων των στοιχείων της γραμμής  $i$  του πίνακα  $A$  γίνεται με το `A(i,:)`.

Η ανάκληση όλων των στοιχείων της στήλης  $j$  του πίνακα  $A$  με το `A(:,j)`.

Οι εντολές αυτές θα χρησιμοποιηθούν πολύ στη συνέχεια του κεφαλαίου αυτού αλλά και του βιβλίου.

### 2.4 Δημιουργία ειδικών πινάκων

Εντολή  
MATLAB

```
A= zeros(n,m)
```

Η εντολή αυτή δημιουργεί έναν πίνακα  $A$   $n \times m$  με όλα τα στοιχεία του μηδενικά, ενώ με την εντολή

```
A= zeros(n)
```

δημιουργείται ένας τετραγωνικός πίνακας  $n \times n$  με όλα τα στοιχεία του μηδενικά.

Εντολή  
MATLAB

```
A=ones(n,m)
```

Η εντολή αυτή δημιουργεί έναν πίνακα  $A$   $n \times m$  με όλα τα στοιχεία του 1.

Εντολή  
MATLAB

```
A=ones(n)
```

Η εντολή αυτή δημιουργεί έναν τετραγωνικό πίνακα  $n \times n$  με όλα τα στοιχεία του τον αριθμό ένα.

**Περίπτωση σύνταξης:** Για να δημιουργήσουμε έναν πίνακα-γραμμή  $n$  στοιχείων με όλα τα στοιχεία του μονάδα χρησιμοποιούμε την εντολή

```
A=ones(1,)
```

ενώ για έναν πίνακα στήλη  $n$  στοιχείων με όλα τα στοιχεία του μονάδα χρησιμοποιούμε την εντολή

```
A=ones(n,1)
```

Εντολή  
MATLAB

```
mat=a:d:b
```

Η εντολή αυτή δημιουργεί έναν πίνακα γραμμή `mat` με τιμές από  $a$  ως  $b$  με βήμα  $d$ , δηλαδή:

```
mat(1)=a, mat(2)=a+d, .....
```

Εντολή  
MATLAB

```
M=linspace(a,b,n)
```

Η εντολή αυτή δημιουργεί πίνακα γραμμή με τιμές  $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ , τα άκρα των  $n$  υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζεται το  $[a, b]$ :

$$M(1)=a, M(2)=x_1=a+h, M(3)=x_2=a+2h, \dots, \text{όπου } h = \frac{b-a}{n}$$

Όμοια, μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποιους διδιάστατους πίνακες.

### Παράδειγμα 2.2

Εκτελέστε την εντολή για τη δημιουργία του διδιάστατου πίνακα  $A=[1:2:21; 6:4:46]$

Command Window											
A =											
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	
6	10	14	18	22	26	30	34	38	42	46	

### Παράδειγμα 2.2

Εκτελέστε την εντολή για τη δημιουργία του διδιάστατου πίνακα  $A=[0:0.2:2; 10:20]'$

Command Window		
A =		
	0	10.0000
	0.2000	11.0000
	0.4000	12.0000
	0.6000	13.0000
	0.8000	14.0000
	1.0000	15.0000
	1.2000	16.0000
	1.4000	17.0000
	1.6000	18.0000
	1.8000	19.0000
	2.0000	20.0000

## 2.5 Πίνακες τυχαίων αριθμών

Εντολή  
MATLAB

```
a=rand(n,m)
```

Η εντολή δημιουργεί έναν πίνακα  $n \times m$  τυχαίων αριθμών στο  $(0,1)$ .

Εντολή  
MATLAB

```
a=rand(n)
```

Η εντολή δημιουργεί έναν τετραγωνικό πίνακα  $n \times n$  τυχαίων αριθμών στο  $(0,1)$ .

**Εντολή  
MATLAB**`A=randi([a,b],n,m)`

Η εντολή δημιουργεί έναν πίνακα  $n \times m$  τυχαίων ακεραίων αριθμών στο  $[a, b]$ .

**Εντολή  
MATLAB**`A=randi([a,b],n)`

Η εντολή δημιουργεί έναν τετραγωνικό πίνακα  $n \times n$  τυχαίων αριθμών στο  $[a, b]$ .

## 2.6 Λήψη τμήματος πίνακα - συνένωση πινάκων

Η συνένωση δύο πινάκων σε έναν πίνακα γίνεται όπως στα επόμενα παραδείγματα.

### Παράδειγμα 2.3

Να γραφεί πρόγραμμα το οποίο:

- Να δημιουργεί δύο πίνακες A και B  $2 \times 3$  τυχαίων ακεραίων στο  $[-5, 5]$ .
- Να συνενώνει τους πίνακες A και B σε έναν πίνακα  $2 \times 6$ .
- Να συνενώνει τους πίνακες A και B σε έναν πίνακα  $4 \times 3$ .

### Προγραμματισμός MATLAB

Δημιουργία δύο πινάκων  $2 \times 3$   
τυχαίων ακεραίων στο  $[-5, 5]$

```
A=randi([-5,5],2,3)
B=randi([-5,5],2,3)
```

Ένωση των πινάκων A και B σε  
έναν πίνακα  $2 \times 6$

```
C=[A B]
```

Ένωση των πινάκων A και B σε  
έναν πίνακα  $4 \times 3$

```
D=[A;B]
```

**Αποτέλεσμα MATLAB**

Command Window						
A =	3	5	-3			
	-3	-2	-3			
B =	1	-2	1			
	0	4	1			
C =	3	5	-3	1	-2	1
	-3	-2	-3	0	4	1
D =	3	5	-3			
	-3	-2	-3			
	1	-2	1			
	0	4	1			

- ✓ Μπορούμε να αποθηκεύσουμε όποιες γραμμές ή στήλες ενός πίνακα σε έναν άλλο πίνακα, όπως στο επόμενο παράδειγμα.

### Παράδειγμα 2.4

Να γραφεί πρόγραμμα το οποίο:

- Να δημιουργεί έναν πίνακα A  $4 \times 5$  τυχαίων ακεραίων στο  $[0, 10]$ .
- Να αποθηκεύει σε έναν πίνακα B την δεύτερη και την τέταρτη γραμμή του A.
- Να αποθηκεύει σε έναν πίνακα C την πρώτη, την τρίτη και την τέταρτη στήλη του A.
- Να δημιουργεί έναν πίνακα D  $5 \times 5$  που προκύπτει από τον A αν προσθέσουμε στην αρχή του μία γραμμή με μονάδες.
- Να δημιουργεί έναν πίνακα E  $4 \times 6$  που προκύπτει από τον A αν προσθέσουμε στο τέλος του μία στήλη με μηδενικά.

στ) Να αποθηκεύει σε έναν πίνακα F την Τρίτη, την τέταρτη και την πέμπτη στήλη του A.  
 ζ) Να δημιουργεί έναν πίνακα G 5x5 που προκύπτει από τον A αν προσθέσουμε ως μεσαία γραμμή (τρίτη) μία γραμμή με τυχαίους ακεραίους στο [-10,0].

**Προγραμματισμός MATLAB**

Δημιουργία πίνακα 4x5 τυχαίων ακεραίων στο [0,10]	<code>A=randi([0,10],4,5)</code>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>Command Window</p> <pre> A =     10     6     2     1    10      9     2     9     2     4      6     3     2     4     2      6     5     2     3     9  B =      9     2     9     2     4      6     5     2     3     9  C =     10     2    10      9     9     4      6     2     2      6     2     9  D =      1     1     1     1     1     10     6     2     1    10      9     2     9     2     4      6     3     2     4     2      6     5     2     3     9  E =     10     6     2     1    10      0     9     2     9     4      0     6     3     2     4      0     6     5     2     3     9  F =      2     1    10      9     2     4      2     4     2      2     3     9  G =     10     6     2     1    10      9     2     9     2     4      0    -6    -9    -8    -6      6     3     2     4     2      6     5     2     3     9                 </pre> </div>
Λήψη της δεύτερης και της τέταρτης γραμμής του A σε έναν πίνακα B 2x5	<code>B=[A(2,:);A(4,:)]</code>	
Λήψη της πρώτης, τρίτης και τέταρτης στήλης του A σε έναν πίνακα C 4x3	<code>C=[A(:,1) A(:,3) A(:,5)]</code>	
Δημιουργία πίνακα-γραμμή (1x5) μονάδων	<code>q=ones(1,5);</code>	
Δημιουργία του πίνακα D 5x5 που προκύπτει από τη συνένωση του q και του A	<code>D=[q;A]</code>	
Δημιουργία πίνακα-στήλη (4x1) με μηδενικά	<code>q=zeros(4,1);</code>	
Δημιουργία του πίνακα D 5x5 που προκύπτει από τη συνένωση του A και του q	<code>E=[A q]</code>	
Λήψη της τρίτης ως και πέμπτης στήλης του A σε έναν πίνακα F 4x3	<code>F=[A(:,3:5)]</code>	
Δημιουργία πίνακα -γραμμής (1x5) τυχαίων ακεραίων στο [-10,0]	<code>q=randi([-10,0],1,5);</code>	
Δημιουργία του πίνακα G 5x5 που προκύπτει από την συνένωση των δύο πρώτων γραμμών A, του q και των δύο τελευταίων γραμμών του A	<code>G=[A(1:2,:);q;A(3:4,:)]</code>	

**Αποτέλεσμα MATLAB**



► Για να δημιουργήσουμε έναν πίνακα A που να έχει ως στήλες τους πίνακες-στήλη ( $n \times 1$ ) B, C και D χρησιμοποιούμε την εντολή

$$A=[B \ C \ D]$$

► Με την εντολή

$$A=[B; C; D]$$

προκύπτει ένας πίνακας-στήλη που περιέχει τα στοιχεία των πινάκων B,C, και D.

► Αν οι πίνακες B,C και D είναι πίνακες γραμμή ( $1 \times n$ ) τότε με την εντολή

$$A=[B \ C \ D]$$

προκύπτει ένας πίνακας γραμμή με τα στοιχεία των 3 πινάκων και με την εντολή

$$A=[B ; C; D]$$

προκύπτει ένας πίνακας 3 γραμμών ( $3 \times n$ ) με γραμμές τα στοιχεία των πινάκων B, C και D αντίστοιχα.

### Παράδειγμα 2.5

Να γραφεί πρόγραμμα το οποίο:

- Να δημιουργεί έναν πίνακα A  $4 \times 6$  τυχαίων αριθμών στο (0,1).
- Να αποθηκεύει σε δύο μονοδιάστατους πίνακες την πρώτη και την τελευταία στήλη του A.
- Να αποθηκεύει σε έναν πίνακα δύο στηλών τους πίνακες του (β).
- Να αποθηκεύει σε έναν πίνακα δύο γραμμών τους πίνακες του (β).
- Να αποθηκεύει σε δύο μονοδιάστατους πίνακες τη δεύτερη και την τελευταία γραμμή του A.
- Να αποθηκεύει σε έναν πίνακα δύο γραμμών τους πίνακες του (ε).
- Να αποθηκεύει σε έναν πίνακα δύο στηλών τους πίνακες του (ε).

### Προγραμματισμός MATLAB

Δημιουργία πίνακα τυχαίων αριθμών στο (0,1)

```
A=rand(4,6)
```

Λήψη σε πίνακες στήλη της πρώτης και της τελευταίας στήλης (β) του A

```
A1=A(:,1)
A2=A(:,6)
```

Ένωση των πινάκων A1 και A2 σε έναν πίνακα 2 στηλών

```
B=[A1 A2]
```

Ένωση των πινάκων A1 και A2 σε έναν πίνακα 2 γραμμών

```
C=[A1'; A2']
```

Λήψη σε πίνακες γραμμή της δεύτερης και της τελευταίας γραμμής (4) του A

```
A3=A(2,:)
A4=A(4,:)
```

Ένωση των πινάκων A3 και A4 σε έναν πίνακα 2 γραμμών

```
D=[A3; A4]
E=[A3' A4']
```

## Αποτέλεσμα MATLAB

Command Window					
A =					
0.7094	0.6551	0.9597	0.7513	0.8909	0.1493
0.7547	0.1626	0.3404	0.2551	0.9593	0.2575
0.2760	0.1190	0.5853	0.5060	0.5472	0.8407
0.6797	0.4984	0.2238	0.6991	0.1386	0.2543
A1 =					
0.7094					
0.7547					
0.2760					
0.6797					
A2 =					
0.1493					
0.2575					
0.8407					
0.2543					
B =					
0.7094	0.1493				
0.7547	0.2575				
0.2760	0.8407				
0.6797	0.2543				
C =					
0.7094	0.7547	0.2760	0.6797		
0.1493	0.2575	0.8407	0.2543		
A3 =					
0.7547	0.1626	0.3404	0.2551	0.9593	0.2575
A4 =					
0.6797	0.4984	0.2238	0.6991	0.1386	0.2543
D =					
0.7547	0.1626	0.3404	0.2551	0.9593	0.2575
0.6797	0.4984	0.2238	0.6991	0.1386	0.2543
E =					
0.7547	0.6797				
0.1626	0.4984				
0.3404	0.2238				
0.2551	0.6991				
0.9593	0.1386				
0.2575	0.2543				

## 2.7 Ανάστροφος και συζυγής ανάστροφος

Εντολή  
MATLAB

A=A'

Ο ανάστροφος ενός πίνακα πραγματικών  $A$  υπολογίζεται με την εντολή  $A'$ . Αν τα στοιχεία του πίνακα  $A$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ο  $A'$  είναι ο συζυγής ανάστροφος του  $A$ , ενώ ο ανάστροφος του  $A$  προκύπτει με την εντολή  $A.'$ . Ο ανάστροφος του πίνακα  $A$  του προηγούμενου παραδείγματος υπολογίζεται με την εντολή

$invA=A'$

**Αποτέλεσμα MATLAB**

Command Window			
invA=			
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	0
5	6	0	8

**2.8 Πράξεις πινάκων ιδίων διαστάσεων στοιχείο προς στοιχείο**

Αφού εισάγουμε δύο πίνακες  $A$  και  $B$  ίδιας διάστασης μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση και αφαίρεση πινάκων καθώς και πολλαπλασιασμό και διαίρεση πίνακα με έναν πραγματικό αριθμό  $k$  και να υπολογίσουμε γραμμικούς συνδυασμούς τους, όπως στο επόμενο παράδειγμα, με τις εντολές ( $k, m \in R$ ).

Εντολές MATLAB	
	$A+B$
	$A-B$
	$A*k$
	$B/k$
	$k*A+m*B$

**Παράδειγμα 2.6**

Να γραφεί πρόγραμμα που να εμφανίζει το άθροισμα των πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

καθώς και τους πίνακες  $C = \frac{B}{2}$  και  $D = A - 3B$ .

Η εντολή `eye(3)` δημιουργεί τον  $3 \times 3$  μοναδιαίο πίνακα  $B$ .

```
A= [ 1 2 3 ; 4 5 6; 7 8 9];
B=eye(3);
ath=A+B
C=B/2
D=A-3*B
```

**Αποτέλεσμα MATLAB**

Επιστούμε με ιδιαίτερη έμφαση την προσοχή στο γεγονός ότι προκειμένου να είναι εφικτή η πρόσθεση και η αφαίρεση δύο πινάκων, πρέπει οι διαστάσεις αυτών να είναι ίσες.

Command Window		
>>	ath` =	
	2	2 3
	4	6 6
	7	8 10
C =		
	0.5000	0.0000 0.0000
	0.0000	0.5000 0.0000
	0.0000	0.0000 0.5000
D=		
	-2	2 3
	4	2 6
	7	8 6

Σε αντίθετη περίπτωση, το MATLAB δεν μπορεί να προχωρήσει στην εκτέλεση της αντίστοιχης πράξης και απαντάει με αντίστοιχο μήνυμα σφάλματος, όπως φαίνεται και στο διπλανό παράδειγμα στο οποίο οι πίνακες που αφαιρούνται δεν έχουν ίδιες διαστάσεις.

Command Window	
>>	A=[3 2;-1 7];
>>	B=[-2 1 3;5 -1 -2];
>>	C=A-B
	Error using - Matrix dimensions must agree.

Εντολές  
MATLAB

A.\*B

A./B

Εντολή  
MATLAB

A.^(1/2)

sqrt(A).

Με τις εντολές  $A.*B$  και  $A./B$ , όπου  $A$  και  $B$  πίνακες ίδιων διαστάσεων, προκύπτουν τα γινόμενα και τα πηλίκα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων  $A$  και  $B$  και με την  $A.^k$  υπολογίζουμε τη δύναμη κάθε στοιχείου του πίνακα  $A$ .

Η εντολή υπολογίζει τις τετραγωνικές ρίζες των στοιχείων του  $A$ .

### Παράδειγμα 2.7

Να γραφεί πρόγραμμα που να εμφανίζει τα τετράγωνα των στοιχείων του πίνακα  $A$  καθώς και τους πίνακες που έχουν στοιχεία τα γινόμενα και τα πηλίκα των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων  $A$  και  $B$ , όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Εκτελούμε τις εντολές →

Αποτέλεσμα MATLAB

```
Command Window
>> A=[1 2;4 -1;7 8];
>> B=[1 1;-2 1;0 -1];
>> C=A.^2

C =
     1     4
    16     1
    49    64

>> D=A.*B

D =
     1     2
    -8    -1
     0    -8

>> E=B./A

E =
    1.0000    0.5000
   -0.5000   -1.0000
     0    -0.1250
```

**Σημειώνεται ότι ο πίνακας του αριθμητή μπορεί να είναι και απλός αριθμός.**

Δηλαδή, π.χ. η γραφή  $B = 1./A$  επιτρέπεται στον διερμηνέα MATLAB, όπου ο πίνακας  $B$  είναι ένας πίνακας ίδιων διαστάσεων με τον  $A$  και κάθε στοιχείο, έστω  $B(i, j)$  αυτού ισούται με  $1/A(i, j)$ . Εμφιστούμε την προσοχή στο ότι αν κάποιο στοιχείο του πίνακα  $A$  ισούται με μηδέν, τότε το  $B$  στην αντίστοιχη θέση θα δείχνει  $\text{Inf}$ , όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα. Το τελευταίο, είναι μια δεσμευμένη μεταβλητή του MATLAB που αντιπροσωπεύει την απαγορευμένη μαθηματική πράξη, διαίρεσης με το μηδέν.

Command Window

```
>>A=[1 2 0;4 -1 1;2 0 -1];
```